用开集的原像理解连续性

在实数轴上，连续性可以用距离描述。换到一般拓扑空间，开集仍然能表达“足够靠近”，于是连续性有了一个只涉及集合的判据。

定义

设 X、Y 是拓扑空间，$f : X \to Y$。若对 Y 中每个开集 V，原像 $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$ 都是 X 的开集，就称 f 连续。

这里的原像对任何映射都有意义，无须假设 f 可逆。

为什么这刻画了局部行为

若 f 连续，给定 x 和含 $f(x)$ 的开集 V，取 $U = f^{-1}(V)$，就有 $x \in U$ 且 $f(U) \subseteq V$。反过来，若对每个这样的 x 和 V 都能找到开邻域 U_x 满足 $f(U_x) \subseteq V$，那么所有这些开邻域的并

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$$

是开集。

例子 · 平方映射

在通常拓扑下，令 $f(x) = x^2$。以 $V = (1, 4)$ 为例，其原像是 $(-2, -1) \cup (1, 2)$。这个计算展示了原像可以分成几段。



要证明连续性，仍须考虑任意开集。给定 x_0 和含 x_0^2 的开集 V，选 $\varepsilon > 0$ 使 $(x_0^2 - \varepsilon, x_0^2 + \varepsilon) \subseteq V$。取 $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|x_0| + 1)\}$。当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|x + x_0| < 2|x_0| + 1$，从而 $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$。于是 f 将 x_0 的这个开邻域映入 V。

练习 · 改变定义域的拓扑

同一个集合 $\mathbb{R}$ 同时可以带离散拓扑和通常拓扑。两个方向的恒等映射都连续吗？

解答 从离散拓扑到通常拓扑的恒等映射连续，因为定义域的每个子集都是开集。

反方向不连续，因为 $\{0\}$ 是离散拓扑的开集，其原像 $\{0\}$ 在通常拓扑中不是开集。